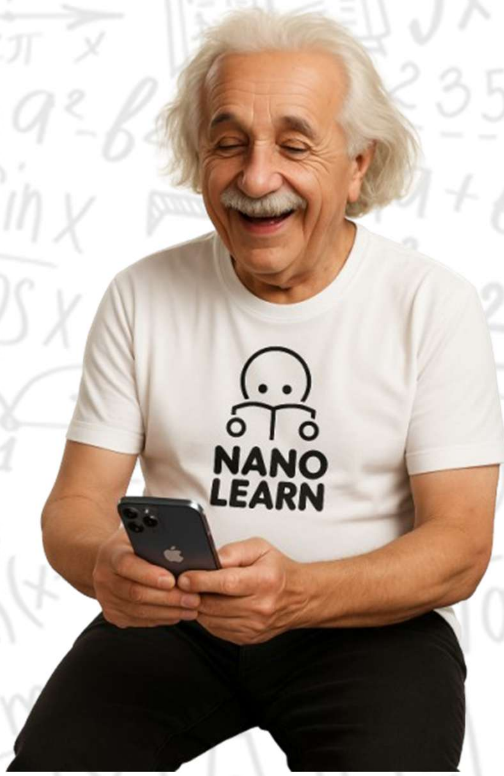
ریاضی مهندسی

به زبون آدمیزاد 2



هر فیلی رو میشه قاشق قاشق خورد

NanoAmouz

برای دانلود جدیدترین نسخه این جزوه، روی نماد نانولرن لمس کنید

مهندس مجتبی احمدی

سلام به مغز متفکر ⚡🧠

فصل اولو خوندی؟ دمت گرم! چون اگه نخونده باشی، این فصل برات مثل اینه که بری وسط یه سریال علمی تخیلی، بعد بپرسی کی با کی دشمنه؟ چی شد؟ چرا همه دارن می‌دَون؟😅

حالا که پایه‌هاتو ساختی، وقتشه بریم سراغ اصل کاری: 🔥 حل کردنِ واقعیِ معادلات PDE

قراره چی یاد بگیریم؟

✅ **یه ترفند نایس و افسانه‌ای به اسم جداسازی متغیرها، یه چیزی تو مایه‌های جادوی ریاضی!**

مخصوص هم معادلات منظم و اتوکشیده (همگن)، و هم اونایی که قشنگ ریختن به هم و دنبال دردسرن (ناهمگن)

😎

ولی نگران نباش...

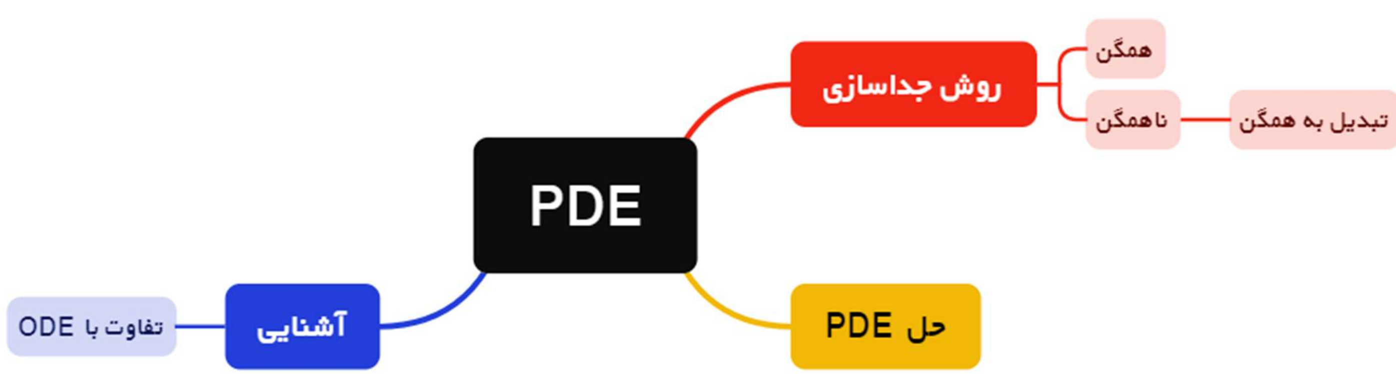
ما بلدیم چجوری همین ناهمگن‌های کله‌شق رو یه جوری رام‌شون کنیم که بشه باهاشون مثل یه ODE رفتار کرد 😌

قراره نشون بدیم که چطوری یه PDE که ظاهرش ترسناک‌تر از امتحان نهایی ترم پاییزه، رو با چند حرکت شطرنجی و زرنگ‌بازانه، تبدیل کنیم به یه سری معادله ساده و قابل‌حل.

🎬 پس پاپ‌کُرن رو بذار کنار، فرمولاتو تیز کن، کوله‌پشتی ریاضی‌تو ببند،

چون فصل دوم یه سفره... قراره معادله‌ها رو یکی‌یکی شکار کنیم، ساده‌شون کنیم، و آخرش مثل قهرمان‌ها ازشون جواب بگیریم 📐💪

🎯آماده‌ای؟ از اینجا به بعدش فقط نابغه‌ها دووم میارن... بزن بریم که وارد مرحله **باس فایت ریاضی** شدیم 🔥 🚀



معادلات PDE چی هستن؟

اگه یادت باشه تو دیفرانسیل می‌گفتیم معادله دیفرانسیل چه معادله ایه؟ آفرین، معادله ای که توش یه مشتق داریم، یادت اومد؟

خب حالا اگه یادت باشه، ما همیشه اون مشتق رو نسبت به ایکس فرض می‌کردیم دیگه، یعنی کاری نداشتیم مشتق نسبت به چیه، چون میدونستیم نسبت به ایکسه و فقط میرفتیم حلش می‌کردیم. حالا فرض کن یه معادله ای داری که توش مشتق از دو تا چیز داری، مثلا نسبت به ایکس و ایگرگ!

مثلا اینجارو ببین :

معادله PDE هستش | هم مشتق نسبت به x، هم نسبت به y	$\frac{\partial f}{\partial x} - 2x + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
معادله ODE هستش | مشتق نسبت به x فقط	$\frac{\partial f}{\partial x} - 2x + 3\frac{\partial f}{\partial x} = 4y + 5$
معادله ODE هستش | مشتق نسبت به y فقط	$5\frac{\partial f}{\partial y} + 3\frac{\partial f}{\partial y} + 5y = 0$
معادله PDE هستش | هم مشتق نسبت به x، هم نسبت به y، هم نسبت به z	$3x + 4\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} + 5y = 1 - \frac{\partial f}{\partial z}$
معادله هست ولی اصلا معادله دیفرانسیل نیست | چون مشتقی توش نیست	$5x + 3y + 5z = 3x - 3$

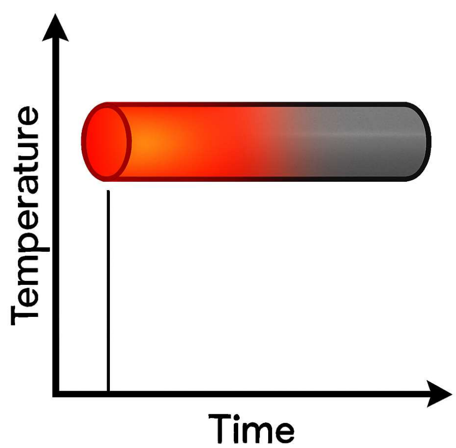
خب حالا بزار یه رازی رو بهت بگم، به همه معادلات دیفرانسیل ای که تابحال خوندی میگن ODE که توشون فقط یه مشتق داشتیم (یعنی نسبت به یه چیز) و به معادلاتی که توشون حداقل دو جور مشتق داریم (یعنی نسبت به دو تا چیز) میگن PDE

فرض کن یه میله فلزی داری، حالا می‌خوای ببینی اگه شروع کنی به گرم کردنش، چقدر طول می‌کشه تا سرش داغ بشه؟ 🔥

قبول داری که دمای میله هم به مکانش بستگی داره (کجای میله‌ای؟) و هم به زمان (چه زمانی گذشته؟) — مثلاً می‌تونی بگی : تو ثانیه‌ی ۵، دمای نقطه‌ی وسط میله این‌قدره ⏱️ 🌡️

خب حالا اگه بخوای اینو ریاضی‌طور بنویسی، نیاز داری یه تابعی داشته باشی که نشون بده دما چطور نسبت به مکان و زمان تغییر می‌کنه. این تغییرات یعنی مشتق‌گیری نسبت به مکان و زمان 📈

و چی میشه وقتی یه تابع داری که نسبت به چند تا متغیر مشتق می‌گیری؟ بله! این همون معادله دیفرانسیل جزئیه یا همون PDE خوشگل خودمونه 😎



بازم شروع شد، این مدرک منو ببرید

بکنم توسر در دانشگاه

خب سوال چرا قبلنا برای نشون دادن مشتق، پریم و $\frac{d}{dx}$ میزاشتیم، الان این ماسماسک $\frac{\partial}{\partial x}$ رو میزاریم؟ اگه گفتی؟!

اولا پریم و $\frac{d}{dx}$ فرقی باهم ندارن، ما فقط برای راحتی کار پریم میزاشتیم، دوما وقتی ما داریم نسبت به یه چیز مشتق می‌گیریم، $\frac{d}{dx}$ رو برمی‌داریم، ولی وقتی داریم نسبت به چند تا چیز مشتق می‌گیریم $\frac{\partial}{\partial x}$ رو برمی‌داریم، چون این نماد جامع تری از مشتق هستش؛ اینا نکات ریزه کاری هستش خیلی جدی نگیر، مهم اینه بتونی سوال کنی!

حالا چجوری این غول های بی شاخ و دم PDE رو حل کنیم؟

مهم ترین راهی که اینجا باید یاد بگیری اسمش "جداسازی" هستش، یعنی میای کاری می‌کنی که این PDE تبدیل بشه به دو تا معادله دیفرانسیل معمولی که بلدی حل کنی (همون ODE)، برای اینکه خوب یاد بگیری، بیا تو مثال بهت یه نمونه کوچولو نشون بدم بعد بریم سراغ اینکه معادله های گنده تر رو چجوری حل کنیم!

مثلا) **معادله دیفرانسیل جزیی $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$ رو حل کن.**

خب معلومه که ما دنبال تابع U می‌گردیم دیگه 😳، اول میایم میگیم بیا فرض کنیم این تابع از دو تا تابعی ساخته شده که یکی شون فقط تابع x هستش و یکی شون فقط تابع y ، اینجوری راحت تر میشه حلش کرد.

$$U = X(x).Y(y)$$

یعنی اینکه فرض کردیم تابع اصلی مون که دنبال می‌گردیم حاصل‌ضرب دو تا تابعی هستش که هر کدوم فقط یه متغیر دارند (یکی شون فقط ایکس و اون‌یکی فقط ایگرگ)، در واقع این همون تغییر متغیر خودمونه دیگه منتها اینم یه مدله! 😜

حالا اینو باید داخل معادله اصلی جایگذاری کنیم، چیا میخوایم؟

$$U = X.Y \xrightarrow{\frac{\partial U}{\partial x} \text{ یعنی مشتق نسبت به } x} X'.Y \qquad U = X.Y \xrightarrow{\frac{\partial U}{\partial y} \text{ یعنی مشتق نسبت به } y} X.Y'$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} X'.Y + X.Y' = 0$$

خب حالا برای اینکه ضربه نهایی رو بهش بزنیم همیشه میایم کل معادله رو به $X.Y$ تقسیم می‌کنیم :

$$X'.Y + X.Y' = 0 \xrightarrow{\div X.Y} \frac{X'}{X} + \frac{Y'}{Y} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{X'}{X} = -\frac{Y'}{Y}$$

الان یه سوال؟ چجوریه که ما طرف چپ مون فقط تابعی از x هستش و طرف راست مون فقط تابعی از y هستش بعد اینا باهم مساوی اند؟ هیچ راهی نداریم جز اینکه قبول کنیم اینا حتما یه عدد ثابت اند، اگه عدد نباشند غیرممکنه بتونن با هم مساوی باشند! (اینجارو دوباره بخون)

پس هرکدوم از اینارو مساوی عدد ثابت مثل λ میزاریم، اینا تبدیل به معادله دیفرانسیل معمولی میشن :

$$\frac{X'}{X} = \lambda \xrightarrow{\text{خطی مرتبه اول}} X = ce^{(\lambda x)} \qquad -\frac{Y'}{Y} = \lambda \xrightarrow{\text{خطی مرتبه اول}} Y = ce^{(-\lambda x)}$$

این معادله دیفرانسیل هارو چجوری حل کردی؟ بچه ها اینا معادلات معمولی هستند، اگه واقعا یادت نیست اصلا و ابدا ادامه نده، برو همین الان جزوه "دیفرانسیل به زبون آدمیزاد" رو دانلود کن و بخش "خطی ها" هارو بخون، حل شون تو یه خطه، راحته ولی چون این جزوه خیلی سنگینه و جا نداریم، باید قبلش یه دور حداقل معادله دیفرانسیل هایی که اینجا می‌بینی و بلد نیستی رو بری مرور کنی! 😭

خب دیگه تمومه جواب پیدا شد :

$$U = X.Y \quad \xrightarrow{\text{پس}} \quad ce^{(\lambda x)}.ce^{(-\lambda x)} \quad \xrightarrow{\text{عدد ثابت هارو یکی کنیم}} \quad U = Ce^{(\lambda x)}e^{(-\lambda x)}$$

پس تا اینجا خلاصه داستان چیشد : گفتیم جوابمون میشه ضرب دو تا تابع، یکی فقط x ، یکی فقط y جایگذاری کردیم، رسیدیم به این‌که هر کدوم باید برابر یه عدد ثابت باشن چون تابع‌ها از هم جدا هستن. بعد این معادلات دیفرانسیل معمولی رو حل کردیم و جواب هر کدوم شد یه تابع نمایی. در نهایت جواب کلی شد ضرب اون دو تا؛ همین!

کل داستان همین بود؟ یه لحظه فکر کن ریاضی مهندسی به این عظمت همینقدر باشه 😁 ، نه خوشگل محکم بشین که این تازه شروع کاره، من دارم یواش یواش میگم که خوب بفهمی، این فصل کلا درباره حل همین PDE هاست، عجله نکن، یه خورده صبوری کن تا بتونم برات آروم آروم با دسته بیل جاش بندازم... 😂 😁

بیا یه بار کل راه رو ببین و بعد تو یه مثال برات کامل جا بندازم و اونقدر مثال حل کنم تا هر مدل PDE رو سه سوته حل کنی...

1. فرض می‌کنیم جواب ما دو تا تابع مستقل اند که تو هم ضرب شده‌اند
$U = X.Y$
2. تقسیم کلش به $X.Y$ که هر طرف فقط یه متغیر بمونه
$\ldots\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y}\ldots$
3. تقسیم کلش به $X.Y$ که هر طرف فقط یه متغیر بمونه
$\ldots\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y}\ldots$
4. مساوی گذاشتن هر طرف با $-\lambda^2$ (فقط کلاسیک ها)
$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \quad , \quad \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$
5. حل جداگونه دو معادله دیفرانسیل معمولی
$X'' + X\lambda^2 = 0 \quad , \quad Y'' + Y\lambda^2 = 0$
6. اعمال شرایط مرزی و پیدا کردن لاندا
مثلا $U(0,t) = 0$
7. جایگذاری جواب هاشون توی فرض اولیه مون
$U = X.Y$
8. گذاشتن U توی سری فوریه و پیدا کردن ضریب ها
$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n \,.\, b_n T_n$

خب تا 6 رو که بلدیم دیگه، بریم مابقی داستان تا کامل بتونیم حل کنیم! 😎

اینجا گفته شرط مرزی منظورش چیه؟ همون میله رو یادته، داخل معادله PDE برای جواب دادن باید بدونیم اول میله دما چقدره، آخرش چطوره و تو زمان صفر دما کجاست— به اینا میگیم شرایط مرزی؛ مثل اینکه بگی «می‌خوام دماش رو حساب کنی، ولی بگو اول و آخرش چه خبره!» یعنی برای اینکه جواب کامل معادله PDE رو بگی باید همیشه شرایط مرزی داشته باشی که خود سوال بهت میده! بابا تو معادله دیفرانسیل معمولی هم بهمون شرط اولیه میدادن تا جواب خصوصی پیدا کنیم یادته؟ این همونه دیگه...

مرحله 4 گفته تعیین علامت لاندا، خب حالا این چیه؟ اصلا برای چی مهمه؟ خیلی ساده است، توی معادلاتی که با مشتق مرتبه دو سروکار داری میتونی لاندا رو یا مثبت بگیری یا منفی؛ دلیل این کار اینه که تو بعضی معادله ها اگه لاندا رو منفی فرض کنی، اونوقت اصلا جواب نمیده و برعکس، تو بعضیا لاندا رو مثبت بگیری جواب نمیده، در کل یعنی مهمه که این لاندا لامصب رو مثبت بگیری یا منفی تا حتما به یه جوابی برسی!

حالا از کجا بفهمم لاندا رو مثبت بگیرم یا منفی؟ جواب این سوال دو صفحه است، کلی تحقیقات از مقالات انجام دادم و دیدم خیلی حالت ها داریم، اما مثل همیشه یه راهی برای دور زدن ش.م هم پیدا کردم جیگرا، تو تمام مسائل کلاسیک (همونایی که استادت بهت میده مثل معادله گرما و مرج و...) اگه $-\lambda^2$ بگیری تمومه! حتما جواب میده!

بهش میگن شرایط دیریکله، یعنی همیشه جواب نمیده ها، ولی چون ما میدونیم اکثرا استادا تو امتحان همون معادله هارو میدن، دیگه خیلی راحت اینو می‌گیریم و همیشه به یه جواب ساده ای میرسیم.

استاد من نفهمیدم، خب من دلم میخواد این لاندا رو هرچی دوست دارم بگیرم، چی میشه مگه؟ مهم اینه که یه عدد ثابته دیگه؟ اینکه میگی یه عدد ثابت درسته، اما خب اینو می سپرم به خودت اگه حوصله داری لاندا رو یه چیز دیگه مثلا مثبت بگیر، بعد برو دو تا معادله دیفرانسیل ای که به دست اومده رو یه کاغذ بردار حلش کن، اونوقت خودت می‌بینی که تو گل گیر می‌کنی و پنچر میشی خوشتیپ 😁

پیدا کردن لاندا یعنی چی؟ مگه لاندا هم باید پیدا کنیم؟ آره دیگه ما از یه جاییمون لاندا درآوردیم کردیم توی معادله، حالا باید بگیم اون لاندای بدبخت چیه تا جواب کامل بشه دیگه، کار سختی هم نیست، همون شرایط مرزی رو اعمال کنی خودش پیدا میشه، حالا تو مثال می‌بینی!

چرا تهش جواب رو میزاریم توی سری فوریه؟ وقتی یه معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) رو حل می‌کنیم، جواب‌ها معمولاً پیچیده و به شکل تابع‌هایی هستند که مستقیم نمیشه خوب تحلیلشون کرد. ما اون جواب‌ها رو می‌ذاریم داخل سری فوریه، چون سری فوریه جواب‌ها رو به یه جمع از موج‌های ساده (مثل سینوس و کسینوس) تبدیل می‌کنه

مثلاً فرض کن دما، روی یه میله رو می‌خوای مدل‌سازی کنی، جواب PDE یه تابع پیچیده‌ست. وقتی جواب رو توی سری فوریه می‌نویسی، انگار داری دما رو به چند تا نوسان ساده تقسیم می‌کنی که فهمیدنش راحت‌تر میشه.

پس خلاصه اینکه: سری فوریه، جواب‌های سخت PDE رو می‌شکنه به قطعات ساده و قابل فهم که باهاشون راحت‌تر کار کنیم. میدونم شاید به نظرت فوریه خودش سخت باشه اما در واقع داره کمر تابع های پیچیده رو می‌شکنه رفیق… 😆

مثلا) معادله دیفرانسیل جزئی رو با شرایط مرزی داده شده حل کن رفیق.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l \\ U(x,0) = x \\ U(0,t) = 0 \\ U(l,t) = 0 \end{cases}$$

یه نفس عمیق بکش، چند دقیقه فقط حواست با من باشه، خط اول که معادله اصلی رو می‌بینیم، بعد اون بازه نشون میده که سر و ته اش کجاست، خط سوم و چهارم هم شرایط مرزی اول و آخرش رو داره نشون میده، یعنی میگه اول و آخرش مقدارش صفر شده، این دو تا به درد جایی می‌خورن که می‌خوایم U رو خلاصه کنیم و اون لاندا مون رو پیدا کنیم، حالا خط دوم به درد اونجایی می‌خوره که میخوایم ضریب های سری فوریه شو پیدا کنیم. اون a^2 هم که می‌بینی یه عدد ثابته که برای خود معادله است، همین!

پس چی یاد گرفتیم تا اینجا، خط اول همیشه معادله رو میده، جاهایی که با x کار داشته یعنی همون خط سه و چهار، به درد پیدا کردن لاندا می‌خوره، جاهایی که با t ور رفته و مساوی یه تابعی گذاشته، به درد پیدا کردن ضریب سری فوریه مون می‌خوره!

مرحله 1 و 2 و 3 :

یعنی فرض کنیم جوابمون یا همون تابع U که دنبالش هستیم حاصل‌ضرب دو تا تابع هستش که یکی‌شون کلا x و اون یکی t هستش. بعد مشتق های لازم رو می‌گیریم و تو معادله جایگذاری‌شون کنیم. حالا کلش رو به $X.T$ تقسیم می‌کنیم… حواست باشه برای راحتی کار میتونی اون a^2 رو هم بندازی پیش T ها…

$$U = X(x).T(t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = X.T' \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X''.T \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اصلی}} X.T' = a^2\, X''.T \xrightarrow{\div X.T} \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$$

مرحله 4 و 5 و 6 :

یعنی دو طرف رو مساوی عدد ثابت ($-\lambda^2$) بزاریم و دو تا معادله دیفرانسیل معمولی از تو دلش بکشیم بیرون و حل کنیم. بعد شرایط مرزی رو بزاریم اون لاندا رو پیدا کنیم :

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \quad \rightarrow \quad X'' + X\lambda^2 = 0 \quad \xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل مرتبه دو}} \quad X(x) = c_1 cos\lambda x + c_2 sin\lambda x$$

$$\frac{T'}{T} = -\lambda^2 \quad\quad T' + Ta^2\lambda^2 = 0 \quad \xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل مرتبه یک}} \quad T(t) = de^{(-a^2\lambda^2 t)}$$

قبلا هم گفتم اون دو تا شرط آخری اگه دقت کنی، هر دوتاشون T رو دارند، ولی X تغییر کرده یعنی سرنخی از X ها داره بهمون میده. یعنی داره میگه :

$$X(0) = 0 \quad , \quad X(l) = 0$$ هر دوتا شو توی X اعمال می کنیم

$$\xrightarrow{X(0)=0} \quad \underbrace{c_1 cos\lambda(0)}_{=1} + \underbrace{c_2 sin\lambda(0)}_{=0} = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0 \quad \rightarrow \quad X(x) = c_2 sin\lambda x$$

$$\xrightarrow{X(l)=0} \quad c_2 sin\lambda(l) = 0 \quad \xrightarrow{sin(n\pi)=0} \quad n\pi = \lambda l \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{n\pi}{l} \quad \xrightarrow{\text{پس}} \quad X(x) = c_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

اوف اوف، کلی نکته دارم، اولا تو خط دوم دیدی که چون $c_1 = 0$ پس دیگه کلا حذفش کردیم از توی معادله، دوما تو خط سوم می‌بینیم ضرب دو تا عدد صفرشده پس حتما حداقل یکی شون صفر بوده دیگه مشتی، گفتیم آقا نمیشه که c_2 صفر باشه چون کلا جواب مون صفر میشه و دیگه هیچی نمی‌مونه، پس حتما این سینوس بوده که صفره؛ خب سینوس ها چجوری صفر میشن؟

قبلا هم گفتم وقتی که $sin(n\pi) = 0$ ؛ پس یعنی $n\pi = \lambda l \quad \rightarrow \quad sin(n\pi) = sin(\lambda l)$

سوما چرا آخرش به جای c_2 نوشتم c_n ؟ چون میخوام بزارم اش تو سری فوریه، دیگه عددش رو n می‌کنم تا برای هر تابعی جور دربیاد، چون اون عدده که مهم نیست، در واقع اون یه عدد ثابته ولی برای اینکه تفکیک شون کنیم، دیگه n میزارم که برای هر تابع یه عدد خاصی دربیاد و فقط برای همون تابع باشه...

خب حالا که لاندا رو داریم، اون تابع T رو هم بنویسیم دوباره، بنده خدا سرپا وایستاده :

$$T(t) = de^{(-a^2\lambda^2 t)} \quad \xrightarrow{\lambda=\frac{n\pi}{l}} \quad T(t) = d_n\, e^{\left(-a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}t\right)}$$

مرحله 7 :

$$U = X(x).T(t) \quad \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \quad U_n = c_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).d_n\, e^{\left(-a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}t\right)} \quad \xrightarrow{\text{ضرب ضریب ثابت ها}} \quad a_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).e^{\left(-a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}t\right)}$$

فهمیدی تهش چیشد؟ گفتم این دو تا ضریب ثابت داره خب عدد هستند دیگه بیا تو هم ضرب شون کنیم و یه عدد ثابت جدید مثلا a_n رو جاشون بزاریم.

مرحله 8 :

خب کل اینو میزاریم توی سری فوریه، فقط این وسط اون عدد ثابت a_n رو هنوز گیر نیاوردیم که اونم از طریق همون خط دوم صورت سوال پیدا می‌کنیم :

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).e^{\left(-a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}t\right)}$$

حالا توی خط دوم نوشته اقا $U(x,0) = x$ $\prec$ یعنی یه جا t رو صفر بگیری جوابش میشه x گرفتی چی میگم؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).e^{\left(-a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}t\right)} \quad \xrightarrow{U(x,0)=x} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).e^{\left(-a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}(0)\right)} \quad \rightarrow \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

خب مرحله ی نهایی، اون ضریب سینوسی رو توی سری فوریه چجوری به دست می‌آوردیم؟ یادت نیست برو فصل قبلی رو بخون :

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x.sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \quad \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \quad \boxed{\frac{2(-1)^{n+1}l}{n\pi}}$$

پس تهش این همه جون کندیم و عرق ریختیم، جوابمون شد :

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}l^2}{n\pi}sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).e^{\left(-a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}t\right)}$$

زندگی مثل یه لیوان چای می‌مونه،

شیرینی و تلخی اش دست خودته!

مثلا) یه PDE اینجاست که منتظر یه قهرمانه تا حلش کنه... حالا فاز نگیر، حلش کن ببینیم 😜

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2U}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2} \qquad 0<x<l\\ U(x,0)=x\\ \dfrac{\partial U(x,0)}{\partial t}=x^2\\ U(0,t)=0\\ U(l,t)=0\end{cases}$$

دوباره مثل قبلی؛ خط اول که معادله اصلی رو می‌بینیم، دوباره اون بازه نشون میده که سر و ته اش کجاست، خط چهارم و پنجم هم شرایط مرزی اول و آخرش رو داره نشون میده، یعنی میگه اول و آخرش مقدارش صفر شده، این دو تا به درد جایی می‌خورن که می‌خوایم U رو خلاصه کنیم و اون لاندا مون رو پیدا کنیم، بازم خط دوم (اینجا خط سوم هم همینطور) به درد اونجایی می‌خوره که میخوایم ضریب های سری فوریه شو پیدا کنیم. همین دیگه! شل کن بریم سراغش😂😂😂

دیگه نمیگم مرحله چند به چنده، دیگه بزرگ شدی، پس فقط به ترتیب می‌نویسم و نکته ای داشت بهت میگم، خوبه؟

$$U=X(x).T(t) \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2U}{\partial t^2}=X.T''\\ \dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}=X''.T\end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اصلی}} X.T''=a^2X''.T \xrightarrow{\div X.T} \frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}$$

$$\frac{X''}{X}=-\lambda^2 \quad\rightarrow\quad X''+X\lambda^2=0 \xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل مرتبه دو}} X(x)=c_1cos\lambda x+c_2sin\lambda x$$

$$\frac{T''}{T}=-\lambda^2 \qquad T''+Ta^2\lambda^2=0 \xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل مرتبه دو}} \boxed{T(t)=d_1\cos(a\lambda t)+d_2\sin(a\lambda t)}$$

$$\xrightarrow{X(0)=0} c_1cos\lambda(0)+c_2sin\lambda(0)=0 \quad\rightarrow\quad c_1=0 \quad\rightarrow\quad X(x)=c_2sin\lambda x$$

$$\xrightarrow{X(l)=0} c_2sin\lambda(l)=0 \xrightarrow{sin(n\pi)=0} n\pi=\lambda l \quad\rightarrow\quad \lambda=\frac{n\pi}{l} \xrightarrow{\text{پس}} X(x)=c_nsin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$T(t)=d_1\cos(a\lambda t)+d_2\sin(a\lambda t) \xrightarrow{\lambda=\frac{n\pi}{l}} T(t)=d_1\cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)+d_2\sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)$$

$$U=X(x).T(t) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} U_n=c_nsin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).\{d_1\cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)+d_2\sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)\} \xrightarrow{\text{ضرب } c_n \text{ در } d_2 \text{ و } d_1} sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\{a_n\cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)+b_n\sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)\}$$

ساده است دیگه ضریب ثابت ها که تو هم ضرب شد یه چیز دیگه نوشتم شون مثلا a_n و b_n و عدد هاشون رو به دلخواه به جای 1 و 2 و... گذاشتم n که بره تو سری فوریه!

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\{a_n\cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)+b_n\sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)\}$$

مثل همیشه تا اینجا جواب رو به دست آوردی (یعنی همون تابع U) ولی هنوز دو تا عدد ثابت a_n و b_n رو نداریم که با شرط های باقی مونده سوال می‌ریم به جنگ شون!

$$\sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\{a_n \cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)+b_n \sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)\} \xrightarrow{U(x,0)=x} x=\sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\{a_n \underbrace{\cos\left(a\frac{n\pi}{l}(0)\right)}_{=1}+b_n \underbrace{\sin\left(a\frac{n\pi}{l}(0)\right)}_{=0}\} \rightarrow x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x.sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \boxed{\frac{(-1)^{n+1}l^2}{n\pi}}$$

خب حالا فهمیدی چرا تو صورت سوال یه خط اضافه تر داده، چون ما اینجا a_n رو گیر آوردیم ولی هنوز b_n مونده، پس میریم سراغ شرط بعدی یعنی $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=x^2$ ، خودت متوجه میشی چی میگه دیگه؟ داره میگه رفیق از کل تابع نسبت به t مشتق بگیر بعد اگه دوباره $t=0$ بزاری، مساوی این تابع x^2 میشه! بریم باهم انجام بدیم :

$$U=\sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\{a_n \cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)+b_n \sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)\} \xrightarrow{\frac{\partial U}{\partial t}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[-a_n\frac{n\pi}{l}\sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)+b_n\frac{n\pi}{l}\cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)\right]$$

$$\xrightarrow{U(x,0)=x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[-a_n\frac{n\pi}{l}\underbrace{\sin\left(a\frac{n\pi}{l}(0)\right)}_{=0}+b_n\frac{n\pi}{l}\underbrace{\cos\left(a\frac{n\pi}{l}(0)\right)}_{=1}\right] \rightarrow x^2=\sum_{n=1}^{\infty} b_n a\frac{n\pi}{l}.sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

$$b_n=\frac{2}{l}\frac{l}{an\pi}\int_0^l x^2.sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{2l^2}{an^2\pi^2}\left((-1)^{n+1}+\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\right)$$

اونجوری نگاه نکن، بازم میگم هیچوقت شلوغی گولت نزنه، این فقط انتگرال گیری جز به جز هستش، خودت همین الان یه دور حلش کن مطمئن بشی از پسش بر میای!

فقط نکته اش این بود که چون داخل تابع یه خورده شیشه داشتیم یعنی $a\frac{n\pi}{l}$ اومدیم برعکس همینو گذاشتیم بیرون انتگرال تا تعادل اش برقرار بشه، اگه یادت باشه تو انتگرال ما وقتی می‌دیدیم داخلش یه جوریه که باید یه چیزی بهش اضافه کنیم تابتونیم حلش کنیم، بهش اضافه می‌کردیم بعد میومدیم بیرون هم برعکس اش رو اضافه میکردیم تا تعادل حفظ بشه، اینجا هم انگار اومدیم گفتیم فرض کن داخل تابع اصلی مون در سری فوریه، یه دونه $a\frac{n\pi}{l}$ داریم پس برعکس اش رو بیرون میزاریم و بعد انتگرال گیری می‌کنیم. اگه این روش اضافه کردن رو یادت نیست برگرد "انتگرال به زبون آدمیزاد" رو یه دور بخون! بیشتر مشکلات ما تو ریاضی از اینه که قبلی هارو یادمون نیست نه اینکه چیزای جدید رو نمیتونیم یاد بگیریم!

باز بگم ما a_n رو با انتگرال کسینوسی حساب می‌کنیم و b_n رو با انتگرال سینوسی حساب می‌کنیم. یعنی اگه دو تا عدد ثابت داشتی دومی رو دیگه باهمون انتگرال سینوسی گیر میاری...

الان معلومه دیگه، عدد ثابت ها هم پیدا شد، پس بزار سر جاشون فقط :

$$U=\sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\{\boxed{\frac{(-1)^{n+1}l^2}{n\pi}}\cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)+\frac{2l^2}{an^2\pi^2}\left((-1)^{n+1}+\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\right)\sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)\}$$

مثلا) اینم یه معادله دیفرانسیل جزئی با شرایط مرزی، میخوام باراندازش کنی برام!

$$\begin{cases} U_{xx}+U_{yy}=0 \qquad 0<x<a \quad , \quad 0<y<b \\ U(x,0)=x \\ U(x,b)=0 \\ U_x(0,y)=0 \\ U_x(a,y)=0 \end{cases}$$

هول نکن، خط به خط نگاه کن ببین چی میفهمی ازش؟ خب خط اول که معادله رو داده اون اندیس ها هم که میدونی نماد مشتق هاش هستن، خط دو و سه باز برای پیدا کردن اون عدد ثابت های داخل سری فوریه ، خط چهار و پنج هم به درد پیدا کردن لاندا می‌خورن.

استاد از کجا فهمیدی باید کدوما رو برای پیدا کردن لاندا استفاده کنیم؟ خیلی ساده اونایی که ایکس رو صفر می‌گیرن، اینجا هم دو تای آخری بود که ایکس رو صفر در نظر گرفتن، فقط مشتق هم دارن که خب یه مرحله اضافه تر داریم یعنی ازش مشتق می‌گیریم بعد این شرایط رو اعمل می‌کنیم.

$$U = X(x).T(t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = X.Y" \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X".Y \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اصلی}} X".Y + X.Y" = 0 \xrightarrow{\div X.Y} \frac{X"}{X} + \frac{Y"}{Y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{X"}{X} = -\frac{Y"}{Y}$$

$$\frac{X"}{X} = -\lambda^2 \quad \rightarrow \quad X" + X\lambda^2 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل مرتبه دو}} X(x) = c_1 cos\lambda x + c_2 sin\lambda x$$

$$-\frac{Y"}{Y} = -\lambda^2 \qquad Y" - Y\lambda^2 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل مرتبه دو}} \boxed{Y(y) = d_1\, e^{\lambda y}\ \wedge + d_2\, e^{-\lambda y}}$$

$$\xrightarrow{X\prime(0)=0} -c_1\lambda\, sin\lambda(0)\ +\ c_2\lambda\, cos\lambda(0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اصلی}} X(x) = c_1 cos\lambda x$$

حواست بود دیگه اول مشتق گرفتم بعد جایگذاری کردم. دقت هم کن تو معادله اصلیه جایگذاری کردم...

$$\xrightarrow{X\prime(a)=0} c_1 sin\lambda x = 0 \xrightarrow{sin(n\pi)=0} n\pi = \lambda a \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{n\pi}{a} \xrightarrow{\text{پس}} X(x) = c_n cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

بازم اول مشتق گرفتم بعد جایگذاری؛ اینجا علاوه بر اینکه c_1 نمیتونه صفر باشه (چون اونجوری دیگه چیزی از نمی‌مونه) حالا λ هم نمی‌تونه صفر باشه، چون اگه صفر بود که دیگه چرا دنبالش می‌گردیم؟ اسکل شدیم؟ 😁 پس حتما همون سینوس صفره و ادامه داستان...

$$Y(y) = d_1\, e^{\lambda y}\ \wedge + d_2\, e^{-\lambda y} \xrightarrow{\lambda=\frac{n\pi}{a}} Y(y) = d_1\, e^{\frac{n\pi}{a}y} + d_2\, e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

$$U = X(x).Y(y) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} c_n cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right).\{d_1 e^{\frac{n\pi}{a}y} + d_2 e^{-\frac{n\pi}{a}y}\} \xrightarrow{\text{ضرب } d_1 \text{ و } d_2 \text{ در } c_n} cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right).\{a_n\, e^{\frac{n\pi}{a}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\}$$

$$\xrightarrow{\text{میزاریم تو سری فوریه}} U = \sum_{n=1}^{\infty} cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right).\{a_n\, e^{\frac{n\pi}{a}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\}$$

$$\xrightarrow{U(x,0)=x} \sum_{n=1}^{\infty} cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right).\{a_n e^{\frac{n\pi}{a}(0)} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}(0)}\} \quad \rightarrow \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right).(a_n + b_n) \ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

دقت کردی که دو تا عدد ثابت رو با هم جمع کردیم و یه عدد ثابت دیگه ای فرضی جاش گذاشتیم، کارمون راحت بشه، اینجاشو هم دیگه بلدی، باید همون a_n رو گیر بیاریم :

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a x.cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \boxed{\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}}$$

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad \rightarrow \quad U(x,y) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

اینایی که تا اینجا خوندیم، اگه دقت کرده باشی سمت راست معادله هاشون همیشه صفر بود یعنی چی؟ یعنی همگن بودند، توی "دیفرانسیل به زبون آدمیزاد" هم دقیقا همین داستان رو داشتیم که ما دو جور معادله حل می‌کردیم، همگن و ناهمگن، خب همونطور که حدس زدی، الان دیگه میریم سراغ ناهمگن های PDE

خبر خوب اینه که ناهمگن ها روش جداگونه ای ندارند، میخوایم با همون روش "جداسازی" حل شون کنیم، فقط قبلش ناهمگن هارو به همگن تبدیل می‌کنیم و بعدش مثل قبل جلو میریم... گرفتی چی میگم؟

😜 ولی خب چون این مبحث خودش یه غول مفصل و پر شاخه‌ست، معمولاً برای شما یه مدل خاص از سؤال مطرح می‌کنن — همون حالتی که طرف راست معادله فقط به یه متغیر (مثلاً x بستگی داره)

معادله PDE ناهمگن | حالتی که سمت راست فقط تابع X هستش

شاید ندونی ولی باید بگم مدل های ناهمگن زیاد اند، خودت تصور کن میتونی چند جور تابع بزاری تا ناهمگن بشن، حالا بگذریم که چند مدل میتونیم شرایط مرزی بزاریم و... حالا سرتو درد نیارم 😔 ، اینجا فقط میخوایم اون حالتی رو یاد بگیریم که خیلی تو امتحانا میاد و تو اکثر جزوه استادا سر و کلش پیدا میشه، یعنی حالتی که طرف راست معادله که ناهمگن اش کرده یه تابعی از ایکس هستش.

برای حلش مجبوریم اول اینو به همگن تبدیل کنیم بعد دیگه بلدی معادله همگن رو حل کنی دیگه؟ مثل قبلی هاست، حالا بریم سراغ مراحل تبدیل ناهمگن ها همگن :

دوباره بیا کل راه رو ببین و بعد تو یه مثال برات کامل جا بندازم...

1

فرض می‌کنیم جواب ما دو تا تابع اند که با هم جمع شده‌اند، منتها W فقط تابعی از ایکس هستش.

$$U = V + W$$

2

W رو میزاری جای معادله اصلی، هرچی مشتق نسبت به ایکس نیست (مثلا t) رو صفر می‌گیری و مشتق نسبت به ایکس رو تنها میکنی!

$$W_{xx} = f(x)$$

3

حالا هر چند بار نیازه انتگرال می‌گیریم تا خود W رو تنها گیر بیاریم

$$\int\int W_{xx}\,dxdx = W + c_1 + c_2$$

4

c_1, c_2 رو از طریق شرایط مرزی پیدا می‌کنیم

$$U(0) = 0 \ \rightarrow \ c_1 = \cdots$$

5

$U = V + W$ رو می‌زاریم توی معادله اصلی جای U و اینجوری معادله همگن میشه

$$U_{xx} - U_{tt} = x \ \xrightarrow{U=V+W} \ (V+W)_{xx} - (V+W)_{tt} = x$$

$$\rightarrow \ V_{xx} - V_{tt} = 0$$

6

اعداد شرایط مرزی رو بزار داخل W و هر چی شد، شرایط مرزی رو ازش کم کن

$$U(0,x) = 0 \ \rightarrow \ w(x,0) = \cdots - w(x)$$

مرحله 1 :

میایم فرض می‌کنیم جوابمون در واقع دو تا تابع هستش که باهم جمع شدند، یعنی ، فقط چون هدف مون اینه که اینو همگن کنیم باید W رو فقط تابعی از x فرض کنیم، این W در واقع همون تابعی هستش که قراره باعث بشه اون سمت راست معادله حذف بشه و همگن بشه، چیزی که قراره بمونه همون V هستش.

مرحله 2 :

حالا قراره W رو پیدا کنیم که اصلا چی باید باشه؟ میایم به جای اون U داخل معادله اصلی میزاریم W و چون این W فقط تابعی از ایکس بود دیگه مشتق اش نسبت به t حتما صفره پس اون قسمت هارو صفر می‌کنیم و W_{xx} رو تنها می‌کنیم، یعنی تا اینجا تونستیم بفهمیم که W_{xx} چیه!

مرحله 3 و 4 :

دیگه واضحه برای پیدا کردن خودِ W باید به تعداد مشتق هایی که از W گرفته شده انتگرال بگیریم، تا به خودش برسیم، حواسمون هم هست که اینجا مثلا اگه دوبار انتگرال بگیریم، حتما دو تا C هم میده. حالا برای پیدا کردن اینا باید بیایم شرایط مرزی رو بزاریم ببینیم چند دیمان، گیرشون که آوردیم، میزاریم جاشون و دیگه تا اینجای کار فهمیدیم که دقیقا W چیه!

مرحله 5 :

این $U = V + W$ رو جایگذاری می‌کنیم توی معادله اصلی، دقت کن که جای W همونی که به دست آوردیم رو میزاریم، اینجوری باعث میشه طرف راست معادله حذف بشه باهاش، ساده کاری هامون رو که انجام بدیم، به معادله ای میرسیم که فقط V ها می‌مونن و یه معادله همگن رو برامون می‌سازن که دیگه بلدیم حلش کنیم.

مرحله 6 :

فقط می‌مونه شرایط مرزی که چون معادله مون رو عوض کردیم و همگن اش کردیم، طبیعیه که اینا هم باید آپدیت بشن، بازی مون ساده است، **همه‌ی شرط‌های مرزی رو باید از W کم کنیم** ، ولی اگه جای x شون عددی دارند، فقط باید حواست باشه که ایکس هاش که عددی دارند یانه، اینجا با یه مثال میگم منظورم چیه :

ببین مثلا شرط مرزی میگه $U(x,1) = 0$ ، خب آقا این میگه ایکس هاش که هیچی ولی جای t هاش (یا هر چیز دیگه ای) بیای 1 بزاری جوابش میشه صفر؛ طبیعیه جلوی این فقط باید عدد جوابش یعنی صفر رو منهای خود W کنیم. چرا؟ چون ایکس هاشون تکون نخوردن، ولی فرض کن شرط مرزی بیاد بگه $U(1,t) = 0$ ، اونوقت میگیم پس جای ایکس هامون بیا 1 بزاریم، بعد دیگه جوابش یعنی صفر رو منهای همینی بکنیم که الان توش عدد گذاشتیم (یعنی W که توش عدد گذاشتیم)

خلاصه حرفم اینه که باید همه رو منهای W کنیم. فقط چون W فقط تابعی از ایکس هستش پس اگه شرایط مرزی برای ایکس چیزی داشت حتما داشت این W باید بزاریم. فکر کنم یه کوچولو گیج شدی، خوشتیپ بیا یه مثال برات حل کنم، صفا کنی...

مثلا) معادله دیفرانسیل جزیی زیر رو حل کن.

$$
\begin{cases}
U_{tt} - U_{xx} = x \qquad 0 < x < 1 \\
U(x,0) = 0 \\
U_t(x,0) = 1 \\
U(0,t) = 0 \\
U(1,t) = 0
\end{cases}
$$

داستان از همینجا شروع میشه که می‌بینم سمت راست معادله صفر نیست پس ناهمگن هستش، بریم برای همگن کردنش :

$$
U = V + W \xrightarrow{\text{پیدا کردن } W} W_{tt} - W_{xx} = x \xrightarrow{\text{تنها کردن}} W_{xx} = -x \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \int\int -x\,dx dx = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2
$$

بریم سراغ شرایط مرزی برای کردن عدد ثابت هامون :

ما تابع مون W هستش دیگه و یادمون هستش که این فقط تابعی از x هستش، پس باید بریم سراغ شرایط مرزی که توشون x یه عددی داشته باشه که بزاریم جای اینا، یعنی دو تا خط آخری، گرفتی چی میگم؟

$$
-\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \xrightarrow{U(0,t)=0} -\frac{(0)^3}{6} + C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0
$$

$$
-\frac{x^3}{6} + C_1 x \xrightarrow{U(1,t)=0} -\frac{(1)^3}{6} + C_1(1) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{1}{6}
$$

$$
W = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}
$$

خب حالا جایگذاری کنیم :

$$U_{tt}-U_{xx}=x \xrightarrow{U=V+W} (V+W)_{tt}-(V+W)_{xx}=x \rightarrow V_{tt}+W_{tt}-V_{xx}-W_{xx}=x$$

$$\xrightarrow{W=-\frac{x^3}{6}+\frac{x}{6}} V_{tt}+(0)-V_{xx}-(-x)=x \rightarrow V_{tt}-V_{xx}=0$$ همگن شد

دقت کردی ما با V کاری نداشتیم فقط W رو ساختیم که باعث بشه اون تیکه ناهمگن داستان حذف بشه تا راحت بشیم، فقط مشتق این W نسبت به t صفر بود که دیدی جاش صفر گذاشتیم و آخرش هم فقط V ها موندن و معادله مون همگن شد.

شرایط مرزی رو هم باید آپدیت کنیم، راحتت کنم باید همه شرایط مرزی رو منهای W کنیم، اون شرط هایی که x هاشون سرجاشه (مثل $U(x,0)=0$) که هیچی، فقط منهای W میشن ولی اون شرط هایی که x هاشون یه عدده (مثل $U(0,t)=0$) باید اون عدد رو هم به جای x های W بزاری و بعد منهاش بکنی، بریم انجام بدیم تا یاد بگیری :

$$U(x,0)=0 \xrightarrow{\text{سر جاشه } x} U(x,0)=0-W \rightarrow V(x,0)=\frac{x^3}{6}-\frac{x}{6}$$

$$U_t(x,0)=1 \xrightarrow{\text{مشتق } W \text{ نسبت به } t \text{ صفره}} U_t(x,0)=1-0 \rightarrow V_t(x,0)=1$$

$$U(0,t)=0 \xrightarrow{\text{میگه } x \text{ رو بزار صفر}} U(0,t)=0-W \xrightarrow{W=-\frac{(0)^3}{6}+\frac{(0)}{6}\rightarrow 0} V(0,t)=0$$

$$U(1,t)=0 \xrightarrow{\text{میگه } x \text{ رو بزار یک}} U(1,t)=0-W \xrightarrow{W=-\frac{(1)^3}{6}+\frac{(1)}{6}\rightarrow 0} U(1,t)=0$$

توی خط دوم هم " x سر جاشه" ولی خب حواسمون هست که گفته نسبت به t مشتق بگیر که میدونیم آقا مشتق W نسبت به t صفره دیگه!

حالا ممکنه بگی اصلا برای چی منهای W میکنیم؟ خیلی ساده است، اگه یادت باشه ما یه جور تغییر متغیر گرفتیم (یعنی $U=V+W$)، هدف مون این بود که اون V بمونه و معادله همگن رو بسازه، ولی اون W بره با ناهمگنی بجنگه تا همگنش کنه، حالا توی شرایط مرزی هم همینه دیگه در واقع ما دیگه معادله شده $V_{tt}-V_{xx}=0$ درسته؟ خب دیگه طبق باید از تمام W ها کمش کنیم تا فقط V ها بمونن...

حالا معادله جدیدمون شد این، که همگن هستش و بلدیم حلش کنیم :

$$\begin{cases} V_{tt}-V_{xx}=0 \qquad 0<x<1 \\ V(x,0)=\frac{x^3}{6}-\frac{x}{6} \\ V_t(x,0)=1 \\ V(0,t)=0 \\ V(1,t)=0 \end{cases}$$

اینو میسپرم خودت به روش "جداسازی" که تا اینجا یاد گرفتیم حل کنی، حتما بشین حلش کن تا مطمئن بشی این جزوه به یه دردی خورده، جواب آخرش باید بشه این :

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3}\cos(n\pi t)+\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}\sin(n\pi t)\right)\sin(n\pi x)$$

حالا V گیر اومد ولی ما دنبال U بودیم، خب U چی بود؟ آفرین $U=V+W$:

$$U(x,t)=-\frac{x^3}{6}+\frac{x}{6}+\sum_{n}\left(\frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3}\cos(n\pi t)+\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}\sin(n\pi t)\right)\sin(n\pi x)$$

مثلا) دک و پوز این معادله دیفرانسیل ناهمگن جزیی رو بیار پایین ✌🏻

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{xx} = 6x^2 \qquad 0 < x < 1 \\ U(x,0) = x \\ U_t(x,0) = 1 \\ U(0,t) = 0 \\ U(1,t) = 0 \end{cases}$$

بریم اول همگن اش کنیم :

$$U = V + W \xrightarrow{W \text{ پیدا کردن}} W_{tt} - W_{xx} = 6x^2 \xrightarrow{\text{تنها کردن}} W_{xx} = -6x^2 \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \iint -6x^2\,dxdx = -\frac{x^4}{2} + C_1x + C_2$$

بریم سراغ شرایط مرزی برای کردن عدد ثابت هامون :

$$-\frac{x^4}{2} + C_1x + C_2 \xrightarrow{U(0,t)=0} -\frac{(0)^4}{2} + C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$-\frac{x^4}{2} + C_1x \xrightarrow{U(1,t)=0} -\frac{(1)^4}{2} + C_1(1) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$$

$$W = -\frac{x^4}{2} + \frac{x}{2}$$

خب حالا جایگذاری کنیم :

$$U_{tt} - U_{xx} = 6x^2 \xrightarrow{U=V+W} (V+W)_{tt} - (V+W)_{xx} = 6x^2 \rightarrow V_{tt} + W_{tt} - V_{xx} - W_{xx} = 6x^2$$

$$\xrightarrow{W=-\frac{x^4}{2}+\frac{x}{2}} V_{tt} + (0) - V_{xx} - (6x^2) = 6x^2 \rightarrow V_{tt} - V_{xx} = 0$$ همگن شد

دوباره شرایط مرزی رو هم باید آپدیت کنیم، باید همه شرایط مرزی رو منهای W کنیم، اون شرط هایی که x هاشون سرجاشه که هیچی، فقط منهای W میشن ولی اون شرط هایی که x هاشون یه عدده باید اون عدد رو هم به جای x های W بزاری و بعد منهاش بکنی :

$$U(x,0) = x \xrightarrow{x \text{ سرجاشه}} U(x,0) = x - W \rightarrow V(x,0) = x + \frac{x^4}{2} - \frac{x}{2} = \frac{x^4}{2} + \frac{x}{2}$$

$$U_t(x,0) = 1 \xrightarrow{\text{مشتق } W \text{ نسبت به } t \text{ صفره}} U_t(x,0) = x - 0 \rightarrow V_t(x,0) = x$$

$$U(0,t) = 0 \xrightarrow{\text{میگه } x \text{ رو بزار صفر}} U(0,t) = 0 - W \xrightarrow{W = -\frac{(0)^4}{2}+\frac{(0)}{2} \to 0} V(0,t) = 0$$

$$U(1,t) = 0 \xrightarrow{\text{میگه } x \text{ رو بزار یک}} U(1,t) = 0 - W \xrightarrow{W = -\frac{(1)^4}{2}+\frac{(1)}{2} \to 0} U(1,t) = 0$$

حالا معادله جدیدمون شد این، که همگن هستش و بلدیم حلش کنیم :

$$\begin{cases} V_{tt} - V_{xx} = 0 \qquad 0 < x < 1 \\ V(x,0) = \frac{x^4}{2} + \frac{x}{2} \\ V_t(x,0) = x \\ V(0,t) = 0 \\ V(1,t) = 0 \end{cases}$$

بشین این معادله همگن رو هم حل کن خداوکیلی، جواب آخرش باید بشه این :

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{12(-1)^{n}}{(n\pi)^{3}}+\frac{24(1-(-1)^{n})}{(n\pi)^{5}}\right)\cos(n\pi t)+\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{(n\pi)^{2}}\right)\sin(n\pi t)\right]\sin(n\pi x)$$

برای هزارمین بار، زبونم مو در آمورد، قیافه رو نبین جیگر، خودکار رو بردار و حل کن...

حالا V گیر اومد ولی ما دنبال U بودیم، خب $U=V+W$:

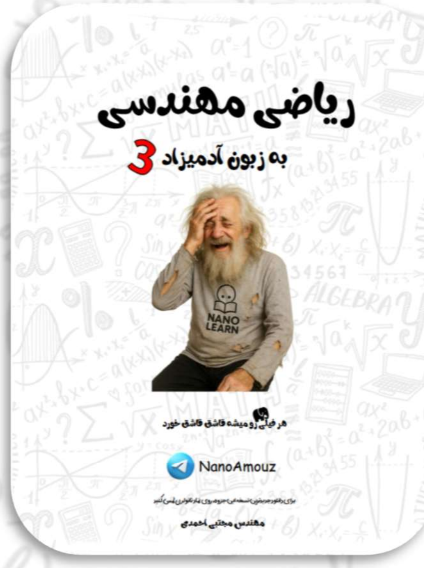
$$U(x,t)=-\frac{x^{3}}{6}+\frac{x}{6}+\sum_{n}\left(\frac{2(-1)^{n}}{n^{3}\pi^{3}}\cos(n\pi t)+\frac{2(1-(-1)^{n})}{n^{2}\pi^{2}}\sin(n\pi t)\right)\sin(n\pi x)$$

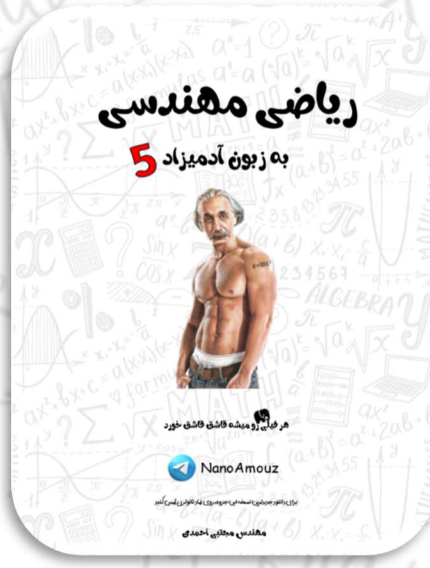
V گیر اومد ولی ما دنبال U بودیم :

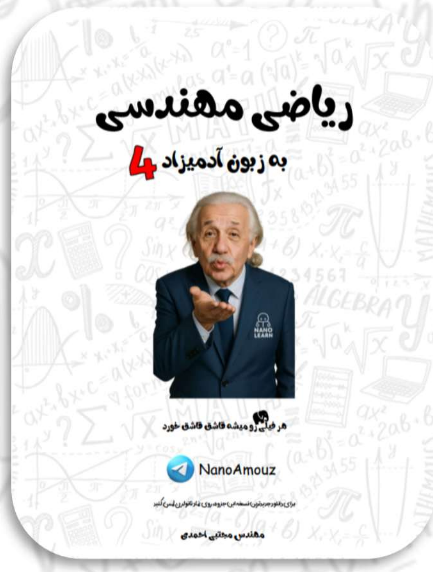
$$U(x,t)=-\frac{x^{4}}{2}+\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{12(-1)^{n}}{(n\pi)^{3}}+\frac{24(1-(-1)^{n})}{(n\pi)^{5}}\right)\cos(n\pi t)+\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{(n\pi)^{2}}\right)\sin(n\pi t)\right]\sin(n\pi x)$$

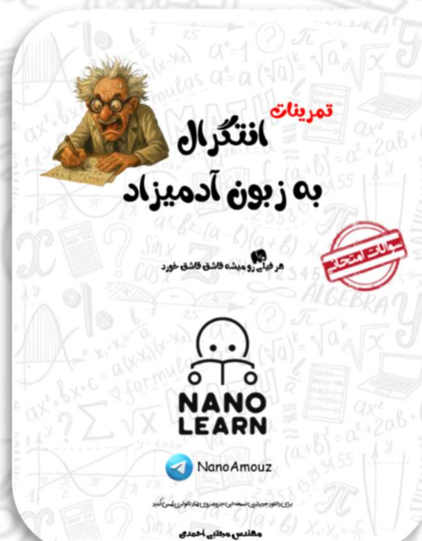
من قبل وبعداز ریاضی مهندسی 😁

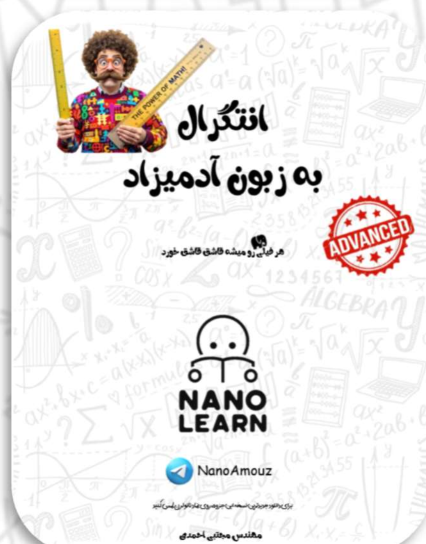
برای دانلود بقیه جزوه هامون فقط روش لمس کنید، همین! 🤗

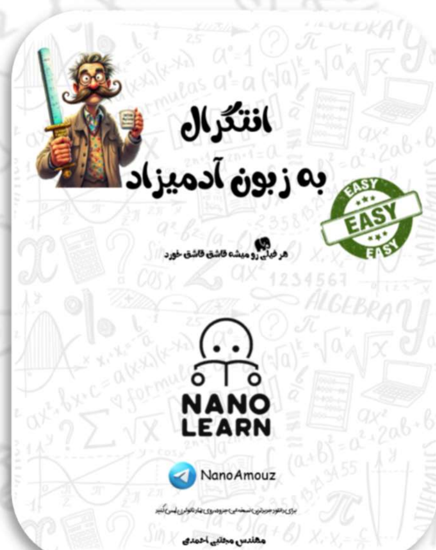






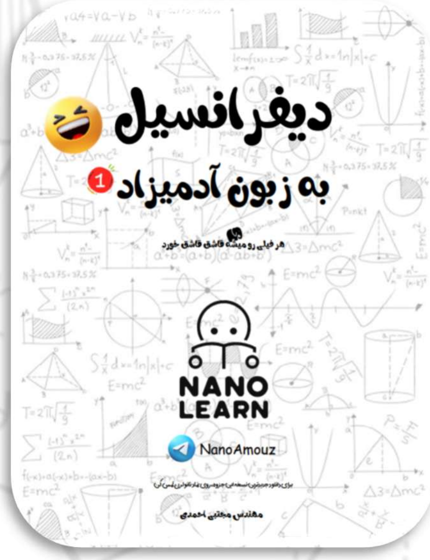






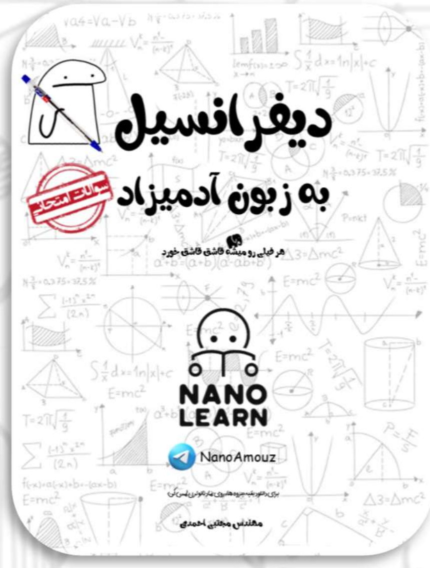

دیفرانسیل
به زبون آدمیزاد 3
هر فیلی رو میشه قاشق قاشق خورد
NANO LEARN
NanoAmouz
مهندس مجتبی احمدی


دیفرانسیل
به زبون آدمیزاد 2
هر فیلی رو میشه قاشق قاشق خورد
NANO LEARN
NanoAmouz
مهندس مجتبی احمدی


دیفرانسیل
به زبون آدمیزاد 1
هر فیلی رو میشه قاشق قاشق خورد
NANO LEARN
NanoAmouz
مهندس مجتبی احمدی


میانگین میانه مد
به زبون آدمیزاد
هر فیلی رو میشه قاشق قاشق خورد
NANO LEARN
NanoAmouz
مهندس مجتبی احمدی


تفکیک کسر
به زبون آدمیزاد
هر فیلی رو میشه قاشق قاشق خورد
NANO LEARN
NanoAmouz
مهندس مجتبی احمدی


دیفرانسیل
به زبون آدمیزاد
هر فیلی رو میشه قاشق قاشق خورد
NANO LEARN
NanoAmouz
مهندس مجتبی احمدی